Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MA1116. Matemáticas III.

GUIA 12: **Diagonalización de matrices**

1. Hallar el polinomio característico de las matrices siguientes. Obtener la multiplicidad algebraica de los valores propios

   (a) $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 & -3 \\ 7 & 8 & 0 & 9 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2. Hallar los subespacios propios, la multiplicidad Algebraica y la geométrica en cada una de las siguientes matrices:

   (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

   (d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ diagonalizable, con valores propios λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y vectores propios $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Se pide:

   (a) Hallar los valores y vectores propios de la matriz $I+hA$, donde donde h es un escalar cualquiera.

   (b) ¿Qué relación debe existir entre los valores propios de A y h, para que la matriz $I + hA$ sea invertible?

(c) Demostrar que si $\mathbf{u}$ es un vector propio de las matrices Ay B también lo es de $A+B$. Hallar el vector propio correspondiente.

(d) Hallar bases de los subespacios propios de A y A^t, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, y comprobar que no coinciden.

4. Encuentre una matriz diagonal semejante a:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Encontrar los valore de a y b para que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sean semejantes mediante la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

6. Comprobar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo determinante, el mismo rango y la misma traza, pero no son semejantes.

7. Dadas las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Obtener:

(a) Los valores y vectores propios de cada una de ellas.

(b) Una base de los subespacios propios.

(c) Diagonalizarlas si es posible.

8. La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$, admite como vector propio a:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \text{y} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz A y sus valores propios.